第35講　関数総合(6)

1　放物線 $C: y=\dfrac{1}{2}x^2$ と直線 $l: y=mx$ について，以下の問いに答えよ．ただし m は $0<m<1$ を満たす実数である．

(1)　C と l の原点以外の共有点の座標を m で表せ．

(2)　C，l および直線 $x=2$ で囲まれる2つの図形の面積の和 S を m で表せ．

(3)　S の最小値とそのときの m の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$b<a^2$ を満たす点 P$(a,\ b)$ から放物線 $C：y=x^2$ へ 2 本の接線 l_1，l_2 を引き，その接点をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ とする．ただし $\alpha<\beta$ にとる．放物線 C と 2 直線 l_1，l_2 で囲まれた部分の面積を S とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a と b を α と β を用いてそれぞれ表せ.

(2)　S を α と β を用いて表せ.

(3)　点 P が直線 $y=x-2$ 上を動くときの S の最小値と，それを与える P の座標を求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積を，m の値によって場合分けして求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　関数総合(6)

［1］　点 A$(a,\ 0)$ $(a>0)$ を通り放物線 $C：y=2x^2-8$ に接する直線が 2 本あるとき，a の値の範囲は $a>$ [ア] である．このとき，2 つの接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする．$\beta-\alpha=3$ のとき，$a=\dfrac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ であり，2 本の接線と C で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である．

［2］　$f(x)=x^2-x-2|x|$ とする．$y=f(x)$ と $y=mx$ が異なる 3 つの共有点をもつとき，原点以外の共有点の x 座標は $x=m-$ [カ]，$x=m+$ [キ] であり，$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれる部分の面積 S は，$m=-$ [ク] のとき最小値 $\dfrac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ をとる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

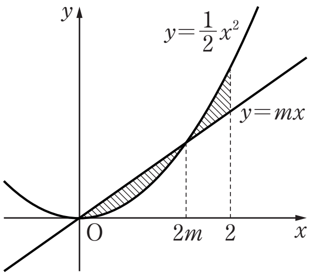
第35講　関数総合(6)

1　放物線 $C: y=\frac{1}{2}x^2$ と直線 $l: y=mx$ について，以下の問いに答えよ．ただし m は $0<m<1$ を満たす実数である．

(1)　C と l の原点以外の共有点の座標を m で表せ．

(2)　C，l および直線 $x=2$ で囲まれる2つの図形の面積の和 S を m で表せ．

(3)　S の最小値とそのときの m の値を求めよ．



(1)　$y=\frac{1}{2}x^2$ と $y=mx$ より

$$\frac{1}{2}x^2=mx \qquad x^2-2mx=0 \qquad x(x-2m)=0$$

$$x=0,\ 2m$$

よって，C と l の原点以外の共有点の座標は $\boldsymbol{(2m,\ 2m^2)}$

(2)　$0<m<1$ より　$0<2m<2$ であることから

$$S=\int_0^{2m}\left(mx-\frac{1}{2}x^2\right)dx+\int_{2m}^{2}\left(\frac{1}{2}x^2-mx\right)dx$$

$$=\int_0^{2m}\left\{-\frac{1}{2}x(x-2m)\right\}dx+\left[\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{2}mx^2\right]_{2m}^{2}$$

$$=-\frac{1}{2}\times\left\{-\frac{1}{6}(2m-0)^3\right\}+\left(\frac{4}{3}-2m\right)-\left(\frac{4}{3}m^3-2m^3\right)$$

$$=\boldsymbol{\frac{4}{3}m^3-2m+\frac{4}{3}}$$

(3)　$f(m)=\frac{4}{3}m^3-2m+\frac{4}{3}$ とおくと

$$f'(m)=4m^2-2=2(2m^2-1)$$

$0<m<1$ における $f(m)$ の増減は右表

m	0	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	1
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$		↘	最小	↗	

よって S は $\boldsymbol{m=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ **のとき**

最小値 $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{4}{3}=\boldsymbol{\frac{4-2\sqrt{2}}{3}}$ をとる

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　$b<a^2$ を満たす点 P$(a,\ b)$ から放物線 $C:y=x^2$ へ 2 本の接線 l_1, l_2 を引き，その接点をそれぞれ $(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$ とする．ただし $\alpha<\beta$ にとる．放物線 C と 2 直線 l_1, l_2 で囲まれた部分の面積を S とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a と b を α と β を用いてそれぞれ表せ．

(2)　S を α と β を用いて表せ．

(3)　点 P が直線 $y=x-2$ 上を動くときの S の最小値と，それを与える P の座標を求めよ．

(1)　$y=x^2$ より　$y'=2x$

よって　C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の方程式は

$$y=2t(x-t)+t^2=2tx-t^2$$

この接線が P$(a,\ b)$ を通るとき　$b=2ta-t^2$　　つまり　$t^2-2at+b=0$

この t の 2 次方程式の 2 解が α, β であることから，解と係数の関係より

$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=b$　　　よって，$\boldsymbol{a=\dfrac{\alpha+\beta}{2}}$, $\boldsymbol{b=\alpha\beta}$

(2)　$(\alpha,\ \alpha^2)$, $(\beta,\ \beta^2)$ における C の接線 l_1, l_2 の方程式はそれぞれ

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\ y=2\beta x-\beta^2$$

$$S=\int_\alpha^a\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_a^\beta\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$$

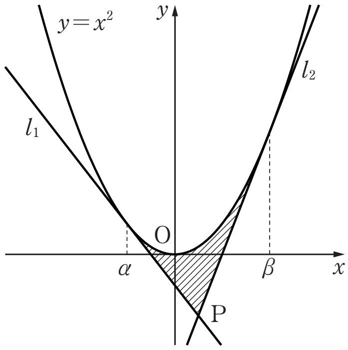
$$=\int_\alpha^a(x-\alpha)^2dx+\int_a^\beta(x-\beta)^2dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_\alpha^a+\left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_a^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(a-\alpha)^3-\frac{1}{3}(a-\beta)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)^3$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3=\boldsymbol{\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3}$$



(別解)　2 点 A$(\alpha,\ \alpha^2)$, B$(\beta,\ \beta^2)$ を通る直線 AB の方程式は

$$y=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha)+\alpha^2=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$

直線 AB と放物線 C で囲まれた部分の面積は

$$S_1=\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(\alpha-a,\ \alpha^2-b)=\left(\dfrac{\alpha-\beta}{2},\ \alpha(\alpha-\beta)\right)$

$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=(\beta-a,\ \beta^2-b)=\left(\dfrac{\beta-\alpha}{2},\ \beta(\beta-\alpha)\right)$　より

三角形 ABP の面積は

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$$S_2=\frac{1}{2}\left|\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\beta(\beta-\alpha)-\alpha(\alpha-\beta)\cdot\frac{\beta-\alpha}{2}\right|$$
$$=\frac{1}{4}|(\beta-\alpha)^3|=\frac{1}{4}(\beta-\alpha)^3$$

よって　$S=S_2-S_1=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$

(3)　点 P が直線 $y=x-2$ 上を動くとき

$$\alpha\beta=\frac{\alpha+\beta}{2}-2$$

このとき　$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$
$$=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha+\beta)+8$$
$$=(\alpha+\beta-1)^2+7$$

よって　$S=\frac{1}{12}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$ は

$\alpha+\beta=1$ のとき　最小値 $\frac{1}{12}\cdot 7^{\frac{3}{2}}=\boldsymbol{\frac{7\sqrt{7}}{12}}$ をとる.

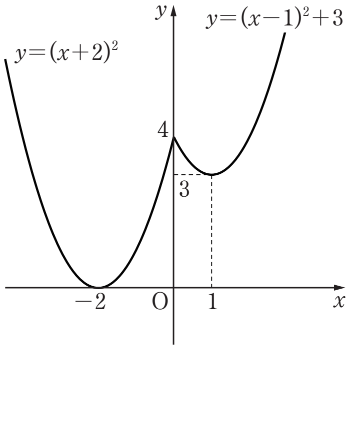
このとき **P の座標は** $\boldsymbol{\left(\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)}$

> **3**　曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積を，m の値によって場合分けして求めよ.

$y=x^2+x+4-|3x|$

$$=\begin{cases} x^2+x+4-3x=x^2-2x+4=(x-1)^2+3 & (x\geqq 0)\\ x^2+x+4+3x=x^2+4x+4=(x+2)^2 & (x\leqq 0)\end{cases}$$

よってこの曲線 C のグラフは右図.



C の $x\geqq 0$ の部分と l：$y=mx+4$ の共有点の x 座標は

$x^2-2x+4=mx+4$　　$x^2-(m+2)x=0$

$x(x-m-2)=0$　　$x=0,\ m+2$

よって，$m+2>0$　つまり　$m>-2$ のとき

共有点は $x\geqq 0$ に 2 つ存在し，

$m\leqq -2$ のとき　共有点は $(0,\ 4)$ の 1 点のみ

C の $x\leqq 0$ の部分と l の共有点の x 座標は

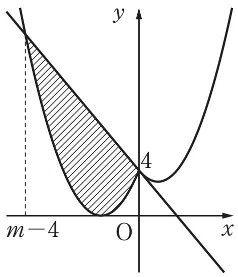
$x^2+4x+4=mx+4$　　$x^2-(m-4)x=0$

$x(x-m+4)x=0$　　$x=0,\ m-4$

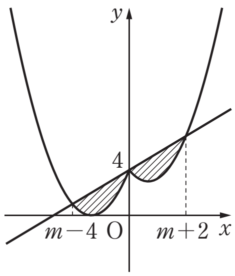
よって，$m-4<0$　つまり　$m<4$ のとき　共有点は $x\leqq 0$ に 2 つ存在し，

$m\geqq 4$ のとき　共有点は $(0,\ 4)$ の 1 点のみ

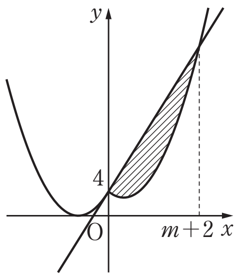
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



$m \leqq -2$ のとき



$-2 < m < 4$ のとき



$m \geqq 4$ のとき

よって，C と l で囲まれる部分の面積 S について

$m \leqq -2$ のとき

$$S = \int_{m-4}^{0} \{(mx+4)-(x^2+4x+4)\}dx$$

$$= -\int_{m-4}^{0} x(x-m+4)dx = \frac{1}{6}(-m+4)^3 = -\frac{1}{6}m^3+2m^2-8m+\frac{32}{3}$$

$m \geqq 4$ のとき

$$S = \int_{0}^{m+2} \{(mx+4)-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$= -\int_{0}^{m+2} x(x-m-2)dx = \frac{1}{6}(m+2)^3 = \frac{1}{6}m^3+m^2+2m+\frac{4}{3}$$

$-2 < m < 4$ のとき

$$S = \int_{m-4}^{0} \{(mx+4)-(x^2+4x+4)\}dx + \int_{0}^{m+2} \{(mx+4)-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$= \frac{1}{6}(-m+4)^3 + \frac{1}{6}(m+2)^3$$

$$= 3m^2-6m+12$$

以上より

$m \leqq -2$ のとき　$-\frac{1}{6}m^3+2m^2-8m+\frac{32}{3}$

$-2 < m < 4$ のとき　$3m^2-6m+12$

$4 \leqq m$ のとき　$\frac{1}{6}m^3+m^2+2m+\frac{4}{3}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 35 講　関数総合(6)

［1］　点 A(a, 0)（$a>0$）を通り放物線 C：$y=2x^2-8$ に接する直線が 2 本あるとき，a の値の範囲は $a>$ **ア** である．このとき，2 つの接点の x 座標を α, β（$\alpha<\beta$）とする．$\beta-\alpha=3$ のとき，$a=\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}$ であり，2 本の接線と C で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}}$ である．

［2］　$f(x)=x^2-x-2|x|$ とする．$y=f(x)$ と $y=mx$ が異なる 3 つの共有点をもつとき，原点以外の共有点の x 座標は $x=m-$ **カ**，$x=m+$ **キ** であり，$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれる部分の面積 S は，$m=-$ **ク** のとき最小値 $\dfrac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ をとる．

解答例

［1］　$y=2x^2-8$　より　$y'=4x$

C 上の点 $(t,\ 2t^2-8)$ における接線の方程式は

$y=4t(x-t)+2t^2-8=4tx-2t^2-8$　……①

これが $(a,\ 0)$ を通るとき　$0=4ta-2t^2-8$　つまり　$t^2-2at+4=0$　……②

よって接線が 2 本存在するのは，②が異なる 2 実数解をもつとき．

判別式 D について $\dfrac{D}{4}=(-a)^2-4>0$　　$(a+2)(a-2)>0$　　$a>0$ より　$a>\mathbf{2}$

このとき，②の 2 実数解が α, β（$\alpha<\beta$）より，解と係数の関係から　$\alpha+\beta=2a$, $\alpha\beta=4$

$\beta-\alpha=3$　より　$(\beta-\alpha)^2=9$　　$(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=9$　　$4a^2-16=9$

$a>0$ より　$a=\mathbf{\dfrac{5}{2}}$

このとき②より　$t^2-5t+4=0$　　$t=1,\ 4$　よって　$\alpha=1$, $\beta=4$

①より 2 本の接線の式は　$y=4x-10$, $y=16x-40$

求める面積は　$\displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}}\{(2x^2-8)-(4x-10)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^4\{(2x^2-8)-(16x-40)\}dx$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}2(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^4 2(x-4)^2dx$$

$$=\left[\frac{2}{3}(x-1)^3\right]_1^{\frac{5}{2}}+\left[\frac{2}{3}(x-4)^3\right]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=\mathbf{\frac{9}{2}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［2］　$f(x)=x^2-x-2|x|$

$$=\begin{cases} x^2-x-2x=x^2-3x=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4} & (x\geqq 0) \\ x^2-x+2x=x^2+x=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4} & (x\leqq 0) \end{cases}$$

$x\geqq 0$ のとき　$f(x)=mx$　より　$x^2-(3+m)x=0$　　$x=0,\ m+3$

よって　$m+3>0$　つまり　$m>-3$ のとき　共有点は $x\geqq 0$ に2つ存在し，

$m\leqq -3$ のとき　共有点は原点のみ

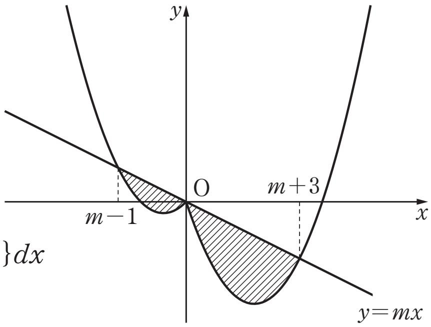
$x\leqq 0$ のとき　$f(x)=mx$　より　$x^2+(-m+1)x=0$　　$x=0,\ m-1$

よって　$m-1<0$　つまり　$m<1$ のとき　共有点は $x\leqq 0$ に2つ存在し，

$m\geqq 1$ のとき　共有点は原点のみ

以上より，$y=f(x)$ と $y=mx$ の共有点が3つ存在するのは $-3<m<1$ のときで，このとき原点以外の共有点の x 座標は

$x=\boldsymbol{m-1},\ \boldsymbol{m+3}$



$y=f(x)$ と $y=mx$ で囲まれた部分の面積 S は

$$S=\int_{m-1}^{0}\{mx-(x^2+x)\}dx+\int_{0}^{m+3}\{mx-(x^2-3x)\}dx$$

$$=-\int_{m-1}^{0}x(x-m+1)dx-\int_{0}^{m+3}x(x-m-3)dx$$

$$=\frac{1}{6}(1-m)^3+\frac{1}{6}(m+3)^3$$

$$=2m^2+4m+\frac{14}{3}=2(m+1)^2+\frac{8}{3}\quad(-3<m<1)$$

したがって S は $m=\boldsymbol{-1}$ のとき最小値 $\boldsymbol{\dfrac{8}{3}}$ をとる．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。